Topología II
Examen V

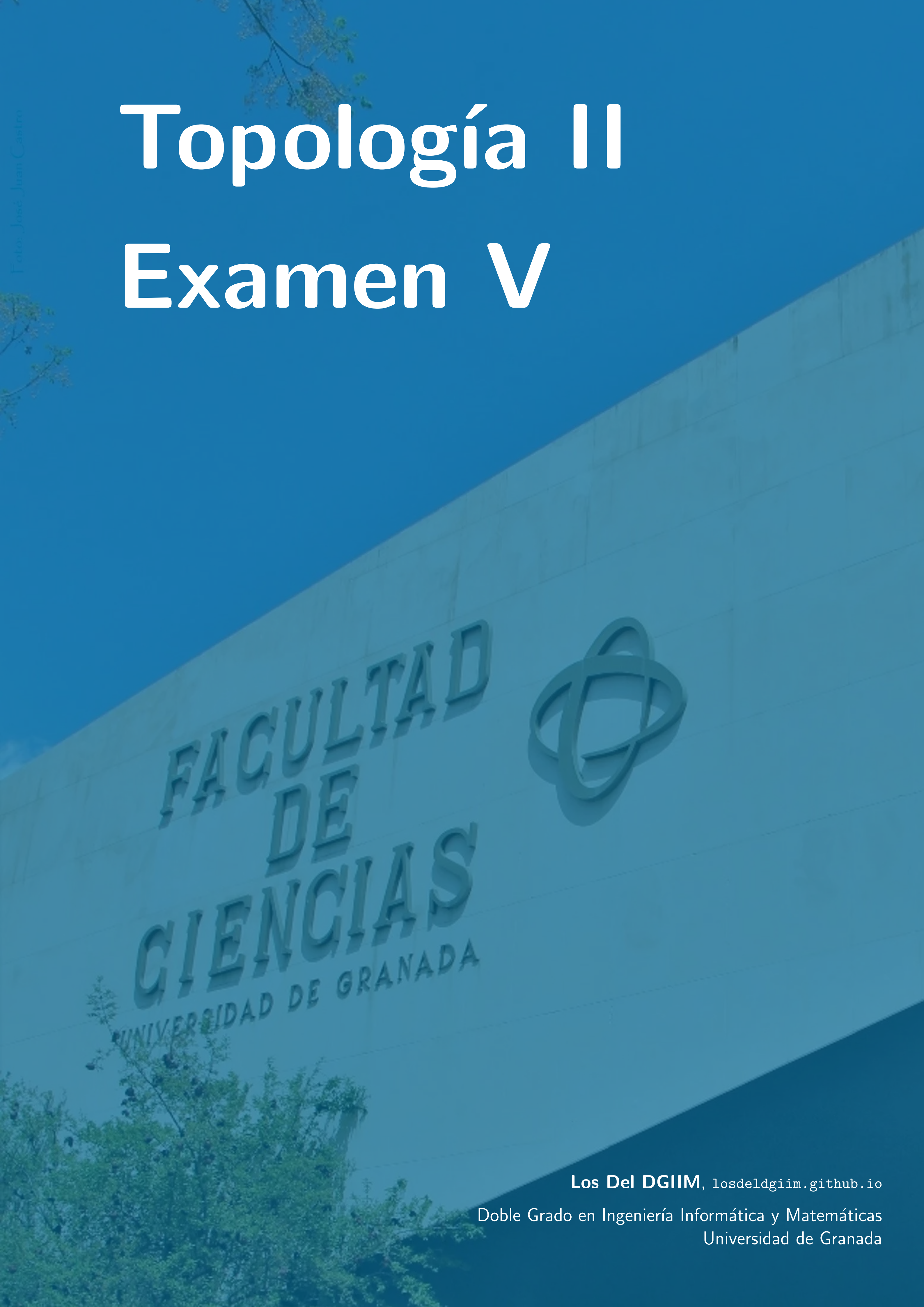


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Examen ordinario.

Fecha 10 de enero de 2025.

Duración 2 horas y media.

Responda la pregunta 1 y elija dos preguntas entre la 2, 3 y 4.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación continua y $F : A \to X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant 1\}$ tal que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces f_* es trivial.

b) Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces Y también tiene un recubridor universal.

c) Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y conexas con S_1 no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

Ejercicio 2. Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos X, Y siguientes:

a) $X = E_1 \cup E_2$, donde E_1, E_2 son las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos G_1 y G_2.

Ejercicio 3. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ y $r : X \to A$ la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$.

a) Demuestra que $H : X \times [0, 1] \to X$ dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre r y la identidad en X.

b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que H se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \to Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Ejercicio 4. Sean $\mathbb{T}$ el toro y S_1, S_2 las superficies siguientes:

a) S_1 está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

¿Son S_1 y S_2 homeomorfas?

Solución.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación continua y $F : A \to X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant 1\}$ tal que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces f_* es trivial.

Es falsa, si consideramos $X = \mathbb{S}^1$ y tomamos $f = Id_{\mathbb{S}^1}$ y $F : A \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$F(x) = \frac{x}{|x|}$$

Tenemos que f y F son continuas, así como que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Como f es un homeomorfismo, tendremos que $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es un isomorfismo de grupos, por lo que f_* no puede ser trivial, al ser $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

b) Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces Y también tiene un recubridor universal.

Es falsa, si consideramos $X = \mathbb{R}^2$ tenemos que X admite un recubridor universal (él mismo con la aplicación identidad). Si denotamos ahora por $S(x, r)$ a la circunferencia de centro x y radio r y consideramos:

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

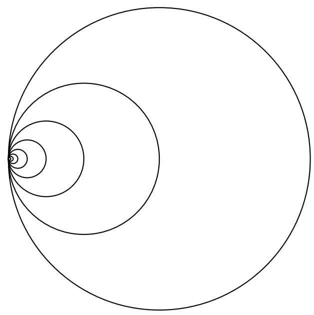


Figura 1: Conjunto Y.

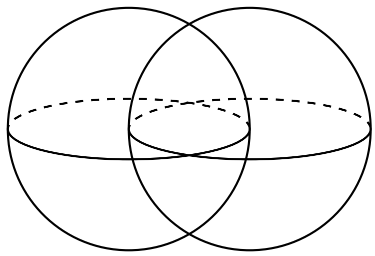
Tenemos que Y es arcoconexo como la unión de conjunto arcoconexos que se interseca en un punto (en el punto $(0, 0)$) y que Y no es semilocalmente simplemente conexo, pues para $x_0 = (0, 0)$ todo entorno U de x_0 ha de contener alguna esfera de radio $1/n$, y el arco cuya imagen rodea dicha circunferencia no puede cerrarse en U pero sí en X, por lo que $(i_U)_*$ no es trivial, lo que prueba que Y no es semilocalmente simplemente conexo, luego no puede tener recubridor universal.

c) Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y conexas con S_1 no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

Ejercicio 2. Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos X, Y siguientes:

a) $X = E_1 \cup E_2$, donde E_1, E_2 son las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

El conjunto que nos dan es el siguiente:

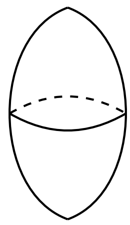


Si consideramos los conjuntos:

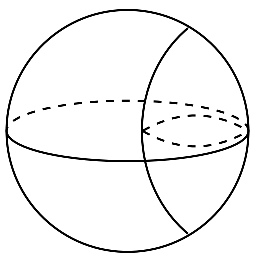
$$U = X \setminus \{(2, 0, 0)\}, \qquad V = X \setminus \{(-2, 0, 0)\}$$

Tenemos:

- Claramente $X = U \cup V$ con U y V abiertos.
- U, V y $U \cap V$ son arcoconexos como unión de conjuntos arcoconexos que se intersecan.
- $U \cap V$ tiene como retracto de deformación el conjunto:

  Que es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, por lo que es simplemente conexo.
- U tiene como retracto de deformación el conjunto Z:

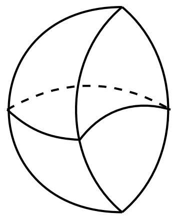
  Si consideramos:

  $$W = Z \setminus \{(-1, 0, 0)\}, \qquad O = Z \setminus \{(1, 0, 0)\}$$

  Tenemos que:

  - $Y = W \cup O$, con W y O abiertos.
  - W, O y $W \cap O$ son arcoconexos.

- W tiene a E_2 como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(W) = \{1\}$.
- O tiene al conjunto:



Como retracto de deformación, que es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, por lo que $\pi_1(O) = \{1\}$.

- Claramente V es homeomorfo a U (basta considerar una rotación), por lo que también será $\pi_1(V) = \{1\}$.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen concluimos que $\pi_1(X) = \{1\}$.

b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos G_1 y G_2.

Ejercicio 3. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ y $r : X \to A$ la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$.

a) Demuestra que $H : X \times [0, 1] \to X$ dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre r y la identidad en X.

La aplicación H es continua, como suma de aplicaciones continuas. Vemos ahora que:

$$\begin{aligned}
&H((x, y, z), 0) = (x, y, z) \qquad \forall (x, y, z) \in X \\
&H((x, y, z), 1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) = r(x, y, z) \in A \qquad \forall (x, y, z) \in X \\
&H((x, y, 0), 1) = r(x, y, 0) = (x, y, 0) \qquad \forall (x, y, 0) \in A
\end{aligned}$$

Por lo que H es una homotopía entre Id_X y $i \circ r$.

b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que H se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \to Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Ejercicio 4. Sean $\mathbb{T}$ el toro y S_1, S_2 las superficies siguientes:

a) S_1 está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

¿Son S_1 y S_2 homeomorfas?